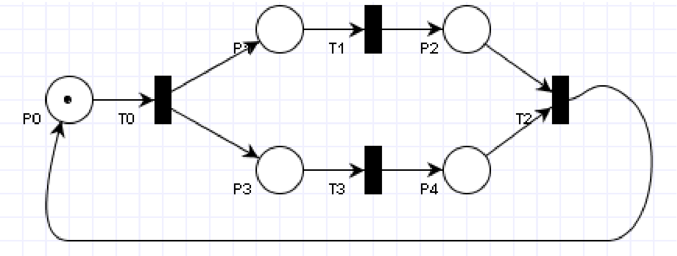
1. Sieci Petriego

Narzędzie wprowadzone przez Carla A. Petriego w 1962 roku do pierwotnie modelowania komunikacji z automatami. Obecnie narzędzie stosowane jest w modelowaniu systemów współbieżnych, dyskretnych, synchronizacji procesów i wielu innych.



Rys. 1-1 Przykład sieci Petriego

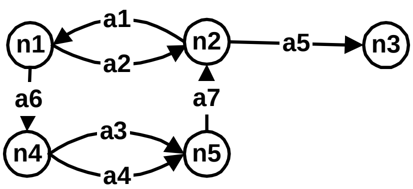
1.1 Grafy skierowane

Definicja 1

Grafem skierowanym nazywamy uporządkowaną trójkę postaci G = (V,A,g)

gdzie:

1. V jest zbiorem węzłów grafu
2. A jest zbiorem łuków grafu takim że $V \cap A = \emptyset$
3. γ: $A \rightarrow V \times V$ jest funkcją zaczepienia która każdemu łukowi przyporządkowuje uporządkowaną parę węzłów.



Rys. 1-2 Przykład grafu skierowanego

V = {n1, n2, n3, n4, n5}
A = {a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7}
g(a1) = (n2,n1), g(a2) = (n1,n2), g(a3) = (n4,n5), g(a4) = (n4,n5),
g(a5) = (n2,n3), g(a1) = (n1,n4), g(a7) = (n5,n2),

Poprzedniki i następniki węzła.

<u>Definicja 2</u>

Niech G = (V,A, g) będzie grafem skierowanym.
Dla dowolnego węzła x zbiór <u>poprzedników</u> *In(x)* definiuje się następująco:

$$In(x) = \{y \in V : \exists a \in A \wedge g(a) = (y, x)\}$$

Dla dowolnego węzła x zbiór <u>następników</u> *Out(x)* definiuje się następująco:

$$Out(x) = \{y \in V : \exists a \in A \wedge g(a) = (x, y)\}$$

Przykład:
Dla grafu z Rys. 1-2 In(n2) = {n1,n5}, Out(n2) = {n3}

<u>Definicja 3</u>

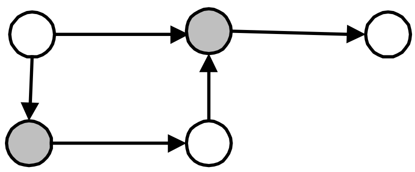
Niech G = (V,A, g) będzie grafem skierowanym.

1. Graf G nazywamy grafem acyklicznym gdy nie zawiera cykli.
2. Graf G nazywamy grafem spójnym gdy dla dowolnych węzłów x i y istnieje nieskierowana droga od x do y.
3. Graf G nazywamy grafem silnie spójnym gdy dla dowolnych węzłów x i y istnieje droga od x do y.

<u>Definicja 4</u>

Graf skierowany G = (V,A, g) nazywany jest grafem dwudzielnym gdy zbiór węzłów V jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów V1 i V2 a dowolny łuk tego grafu łączy węzły należące do różnych zbiorów.

$$\forall a \in A : g(a) \in (V1 \times V2) \cup (V2 \times V1)$$



Rys. 1-3 Przykład grafu dwudzielnego

1.2 Struktura sieci Petriego

<u>Definicja 5</u>

Graf sieci Petriego to uporządkowana trójka postaci:

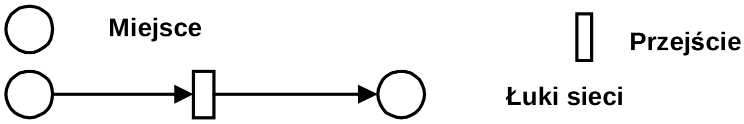
$N = (P,T,A)$

Gdzie:
P jest niepustym zbiorem miejsc (ang. *Places*)

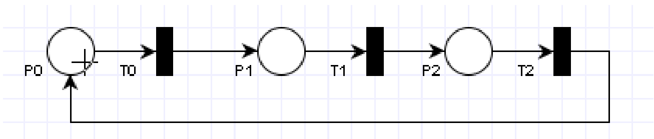
1. T jest niepustym zbiorem przejść (ang. *Transitions*) takim że $(P \cap T) = \emptyset$
2. $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ jest zbiorem łuków sieci

Sieć przedstawiana jest jako graf dwudzielny którego węzłami są elementy ze zbioru wierzchołków P i T a elementy relacji A przedstawiane są jako łuki.

Graf sieci Petriego przedstawia się graficznie w postaci diagramu:



Rys. 1-4 Graficzne przedstawienie miejsc, przejść i łuków grafu sieci Petriego



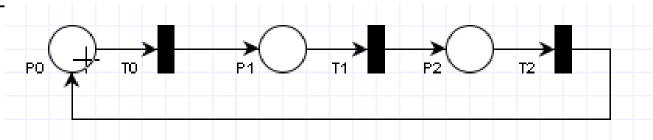
Rys. 1-5 Przykład grafu sieci Petriego

Symulacje i analiza wykonana za pomocą programu Pipe2 (http://pipe2.sourceforge.net)

P = { p0, p1,p2}
T = {t0,t1,t2}
A = {(p0,t0), (t0,p1), (p1,t1), (t1,p2), (p2,t0), (t2,p0)}

<u>Definicja 6</u>

Sieć N nazywamy <u>maszyną stanową</u> gdy każde jej przejście posiada dokładnie jedno miejsce wejściowe i dokładnie jedno miejsce wyjściowe.



Sieć z
Rys. 1-5 jest maszyna stanową.

1.3 Znakowane sieci Petriego

Graf sieci Petriego pokazuje strukturę, ale nie pozwala na modelowanie dynamiki (zachowania) systemu. Aby to umożliwić wprowadza się znakowanie sieci. Znakowanie zmienia się w czasie wykonywania przejść.

Definicja 7

Sieć znakowana jest uporządkowaną czwórką postaci N = (P,T,A,M_0) jeżeli spełnione są warunki:

1. (P,T,A) jest siecią
2. M_0: $P \rightarrow Z_+$ jest funkcją określoną na zbiorze miejsc zwaną znakowaniem początkowym sieci N.

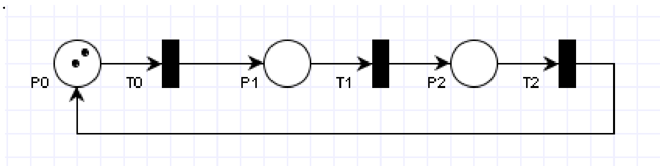
Definicja 8

Sieć znakowana uogólniona jest uporządkowaną piątką postaci N = (P,T,A,W,M_0) jeżeli spełnione są warunki:

1. (P,T,A) jest siecią
2. W: $A \rightarrow$ N jest funkcja wag łuków. Funkcja przyporządkowuje każdemu łukowi sieci liczbę naturalną interpretowaną jako waga (krotność) łuku.
3. M_0: $P \rightarrow Z_+$ jest funkcją określoną na zbiorze miejsc zwaną znakowaniem początkowym sieci N.

Znakowanie początkowe jest funkcją, która każdemu miejscu ze zbioru P przyporządkowuje całkowitą nieujemną liczbę znaczników (żetonów, tokenów) umieszczonych w tym miejscu.

Znaczniki prezentowane są graficznie w postaci kropek umieszczanych w kółkach reprezentujących miejsca.



Rys. 1-6 Przykład znakowanej sieci Petriego (Przyklad1)

Definicja 9

Znakowaniem sieci N = (P,T,A,M_0) nazywamy dowolną funkcję M odwzorowującą miejsca P w liczbę całkowitą nieujemną (liczba p interpretowana jest jako liczba znaczników w miejscu $p \in P$).

$M: P \rightarrow Z_+$

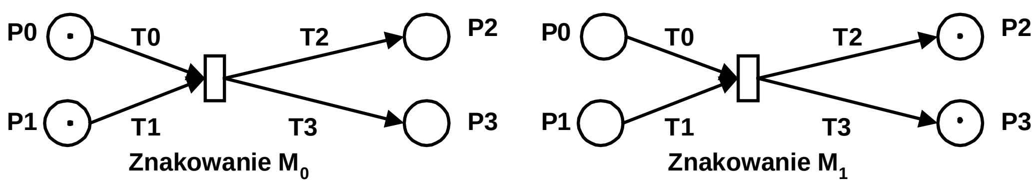
Znakowanie sieci ulega zmianie w wyniku wykonywania (odpalania) przejść.

Wykonanie przejścia polega na usunięciu znacznika z każdego miejsca wejściowego przejścia i dodaniu znacznika do każdego miejsca wyjściowego.

Definicja 10

Przejście t jest aktywne, jeżeli każde z jego miejsc wejściowych zawiera co najmniej jeden znacznik.

Wykonać się może tylko przejście aktywne.



Rys. 1-7 Przejście od znakowania M_0 do znakowania M_1.

Zapis znakowania:

M(p) – funkcja podająca ile znaczników znajduje się w miejscu p.

Przyjmując że miejsca są uporządkowane znakowanie może być zapisane za pomocą wektora.

$M_0 = (1,1,0,0)$, $M_1 = (0,0,1,1)$

Jeżeli dla znakowania M_1 przejście t jest aktywne to w jego wyniku otrzymujemy znakowanie M_2.

$M_2(p) = M_1(p) - 1$ gdy $p \in In(t) – Out(t)$

$M_2(p) = M_1(p) + 1$ gdy $p \in Out(t) - In(t)$

$M_2(p) = M_1(p)$ w pozostałych przypadkach

Akcję tę zapisujemy następująco:

$$M_0 \xrightarrow{t} M_1$$

Od znakowania M_0 można przechodzić do kolejnych znakowań M_1, M_2, ...,M_k wykonując przejścia aktywne t_1, t_2,...t_k.

$$M_0 \xrightarrow{t1} M_1 \xrightarrow{t2} M_2 \xrightarrow{t3} \ldots \xrightarrow{tk} Mk$$

Mówimy że ciąg przejść $\alpha = t_1, t_2, \ldots t_k$ prowadzi od stanu M_0 do znakowania M_k co zapisujemy jako:

$$M_0 \xrightarrow{a} M_k$$

1.4 Własności sieci Petriego:

- Strukturalne – niezależne od znakowania początkowego, zależne od struktury
- Behawioralne – zależne od znakowania początkowego

<u>Własności behawioralne:</u>

- Osiągalność
- Ograniczoność
- Zachowawczość
- Żywotność
- Odwracalność

<u>Osiągalność</u>

W analizie programów i systemów współbieżnych ważne jest stwierdzenie czy pewien pożądany stan M_k może być osiągnięty ze stanu M_0.

<u>Definicja 11</u>

Znakowanie M_k jest osiągalne ze stanu M_0 gdy istnieje ciąg przejść $\alpha = t_1, t_2, ...t_k$ który prowadzi od znakowania M_0 do znakowania M_k .

<u>Definicja 12</u>

<u>Znakowanie osiągalne</u> dla sieci N ze znakowania M_0 jest to dowolne znakowanie jakie można otrzymać ze znakowania M_0 w wyniku wykonania skończonej liczby przejść.

Zbiór wszystkich znakowań osiągalnych ze stanu M_0 oznaczamy jako $R(M_0)$.

Zbiór wszystkich przejść które wykonać można od znakowania M_0 oznaczmy jako $L(M_0)$.

Problem osiągalności stanu M_k ze stanu M_0 polega na zbadaniu czy $M_k \in R(M_0)$.

1.5 Ograniczoność i bezpieczeństwo sieci

Nieformalna definicja bezpieczeństwa:

System bezpieczny – taki system który znajduje się w pożądanym stanie.

Pojęcie ograniczoności jest próbą ujęcia bezpieczeństwa w formalny sposób.

System używa ograniczonego zestawu zasobów reprezentowanych w sieci Petriego jako znaczniki. Nieograniczony wzrost liczby znaczników w miejscu odzwierciedla przekroczenie limitu zasobów.

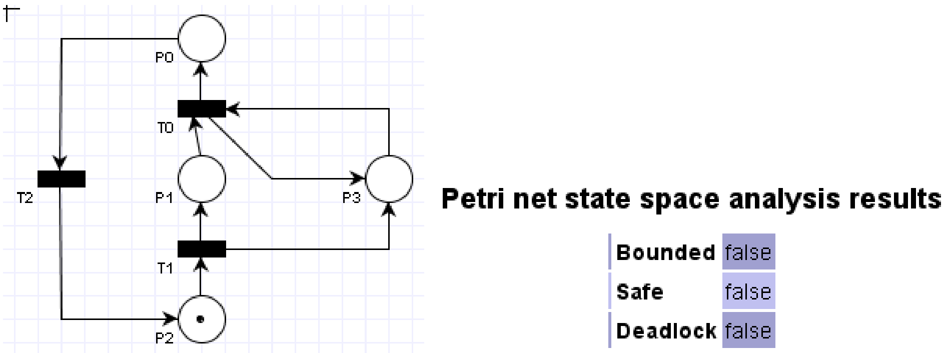
Koncepcja ograniczoności sieci Petriego jest używana do odwzorowanie problemu zachowania limitu zasobów. Znaczniki w miejscu odwzorowują zasoby.

Definicja 13

Miejsce p nazywane jest *k ograniczonym* gdy przy dowolnym znakowaniu osiągalnym ze znakowania początkowego M_0 liczba znaczników w miejscu p jest nie większa niż *k*.

$$\exists k \in N \quad \forall M \in R(M_0) \quad : M(p) <= k$$

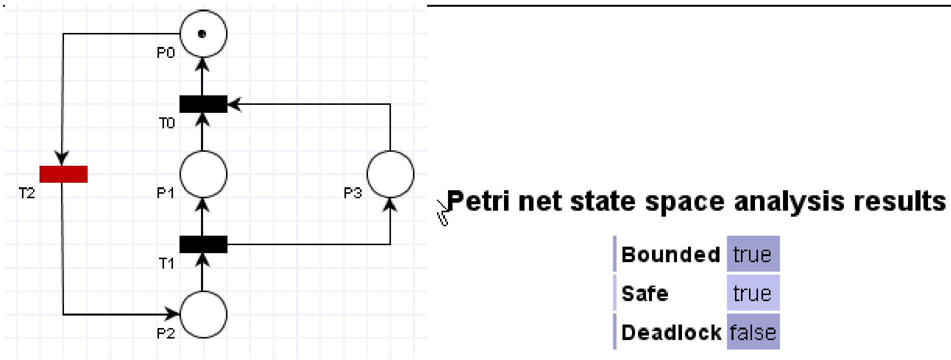
Sieć nazywamy *k-ograniczoną* jeżeli wszystkie jej miejsca są *k*-ograniczone.



Rys. 1-8 Przykład sieci nieograniczonej

Definicja 14

Sieć nazywamy bezpieczną gdy jest 1 ograniczona.



Rys. 1-9 Przykład sieci bezpiecznej (Przyklad2)

<u>Zachowawczość sieci</u>

Zasoby sytemu oznaczane są w sieci Petriego jako znaczniki. W rzeczywistych systemach liczba znaczników pozostaje stała.

Sieć Petriego jest siecią zachowawczą gdy liczba występujących w niej znaczników jest stała.

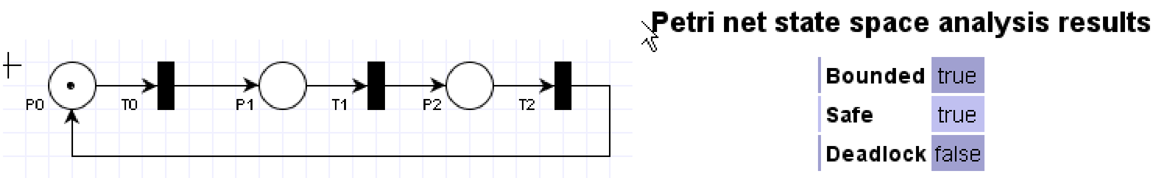
<u>Definicja 15</u>

Jeżeli dla każdego znakowania M osiągalnego ze znakowania początkowego M_0 liczba znaczników w sieci pozostaje stała to sieć N jest <u>siecią zachowawczą</u>.

$$\forall M \in R(M_0): \quad \sum_{p \in P} M(p) = \sum_{p \in P} M_0(p)$$

Wniosek:

Jeżeli sieć N jest maszyną stanową to jest ona zachowawcza.

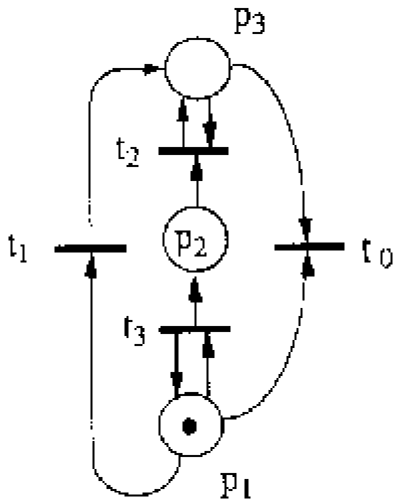


Rys. 1-10 Przykład sieci zachowawczej

Żywotność sieci

Żywotność programu – każde pożądane zdarzenie w końcu nastąpi.

Żywotność sieci Petriego – każde przejście ma szanse się wykonać.



Rys. 1-11 Sieć Petriego z przejściami o różnych stopniach żywotności

Definicja 16

Sieć nazywamy żywą, jeżeli dla każdego oznakowania osiągalnego ze znakowania początkowego, wychodząc od tego oznakowania można wykonać każde przejście w sieci.

Definicja pociąga za sobą własność braku możliwości zablokowania jakiejkolwiek części sieci.

Często wystarczą słabsze warunki – definiuje się żywotność L_0, L_1, L_2, L_3

Dla przykładu z Rys. 1-11
t_0 – przejście martwe
t_1 – może się wykonać najwyżej raz
t_2 – może się wykonać skończoną liczbę razy
t_3 – może się wykonywać w nieskończoność

Definicja 17

Miejsce $p \in P$ nazywamy żywym, jeżeli dla dowolnego znakowania $M \in R(M_0)$ istnieje znakowanie $M' \in R(M)$ takie, że $M'(p) > 0$.

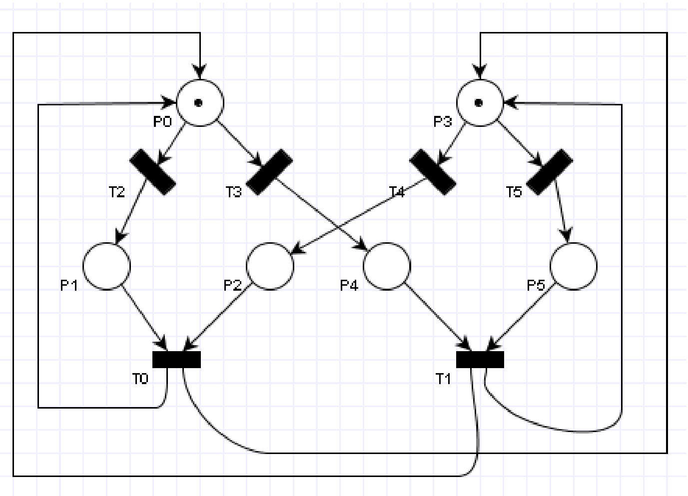
Żywotność miejsca – miejsce ma szanse zawierać znaczniki.

Żywotność przejścia – przejście ma szanse się wykonać.

Twierdzenie 1-1

Jeżeli sieć znakowana N jest silnie spójną maszyną stanową, której zbiór miejsc jest znakowany, to jest to sieć żywa.

Zakleszczenie oznacza niemożliwość odpalenia jakiejkolwiek tranzycji.



Rys. 1-12 Sieć Petriego ilustrująca zakleszczenie - zastój meksykański

Petri net state space analysis results

Bounded	true
Safe	true
Deadlock	true

Shortest path to deadlock: T2 T5

Analiza sieci Petriego dla przykładu z Rys. 1-12

<u>Odwracalność</u>

W rzeczywistych systemach ważną sprawą jest możliwość wycofania się z błędu – powrót do stanu początkowego.
W sieciach Petriego własność tę odwzorowuje odwracalność (ang. *Reversibility*)i stan własny (ang. *Home state*) sieci.

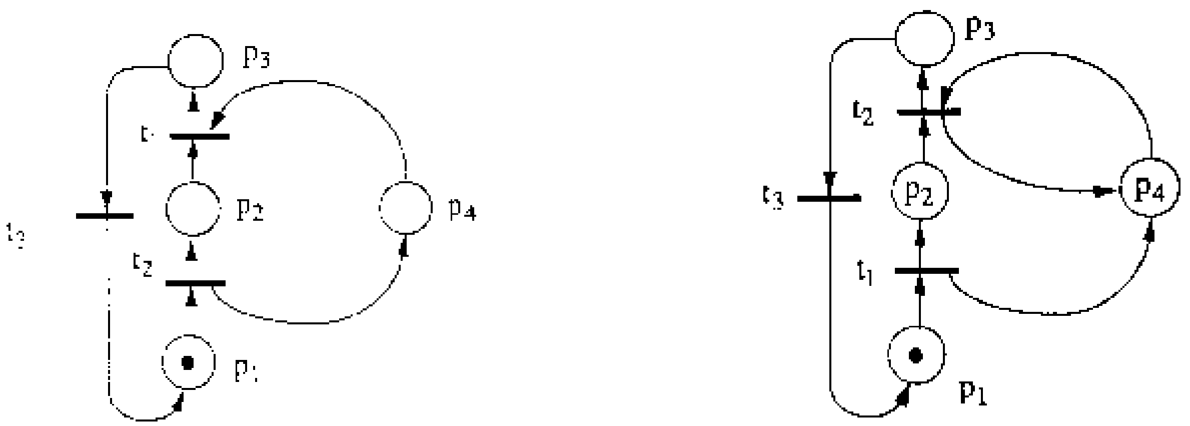
Definicja 18

Sieć Petriego N jest odwracalna dla znakowania początkowego M_0 jeżeli dla każdego znakowania $M \in R(M_0)$, M_0 jest osiągalny z M.

Mniej restrykcyjny jest własność stanu własnego sieci.

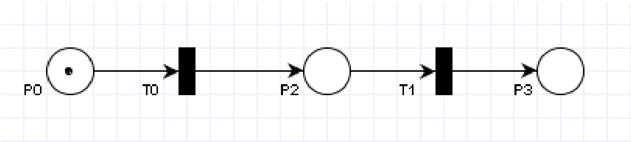
Definicja 19

Stan M_i jest nazywany stanem własnym jeżeli dla każdego znakowania $M \in R(M_0)$, M_i jest osiągalny z M.

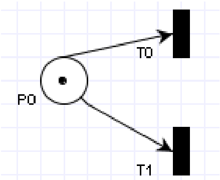


Rys. 1-13 Przykład sieci odwracalnej i nieodwracalnej

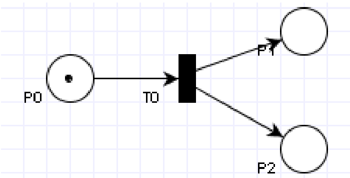
1.6 Charakterystyczne konstrukcje sieciowe



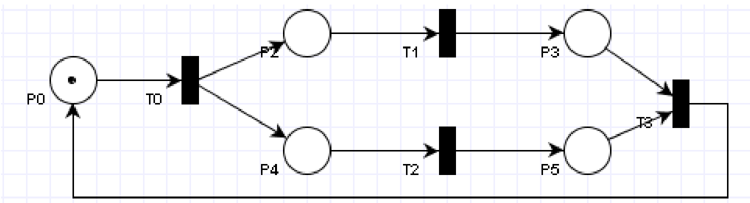
Rys. 1-14 Czynności sekwencyjne



Rys. 1-15 Wybór niedeterministyczny

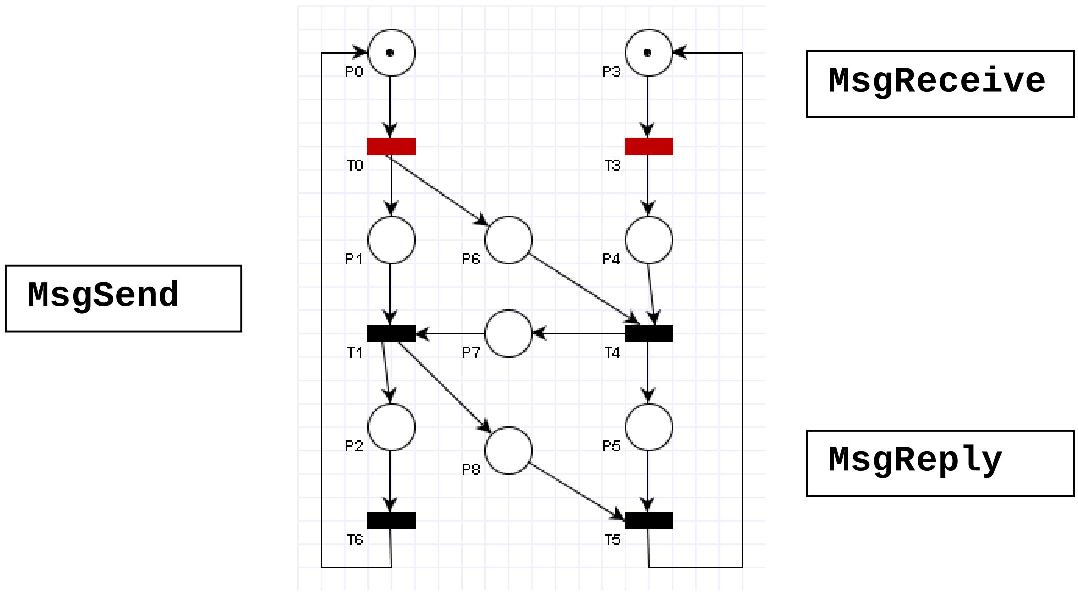


Rys. 1-16 Podział na czynności wykonywane równolegle

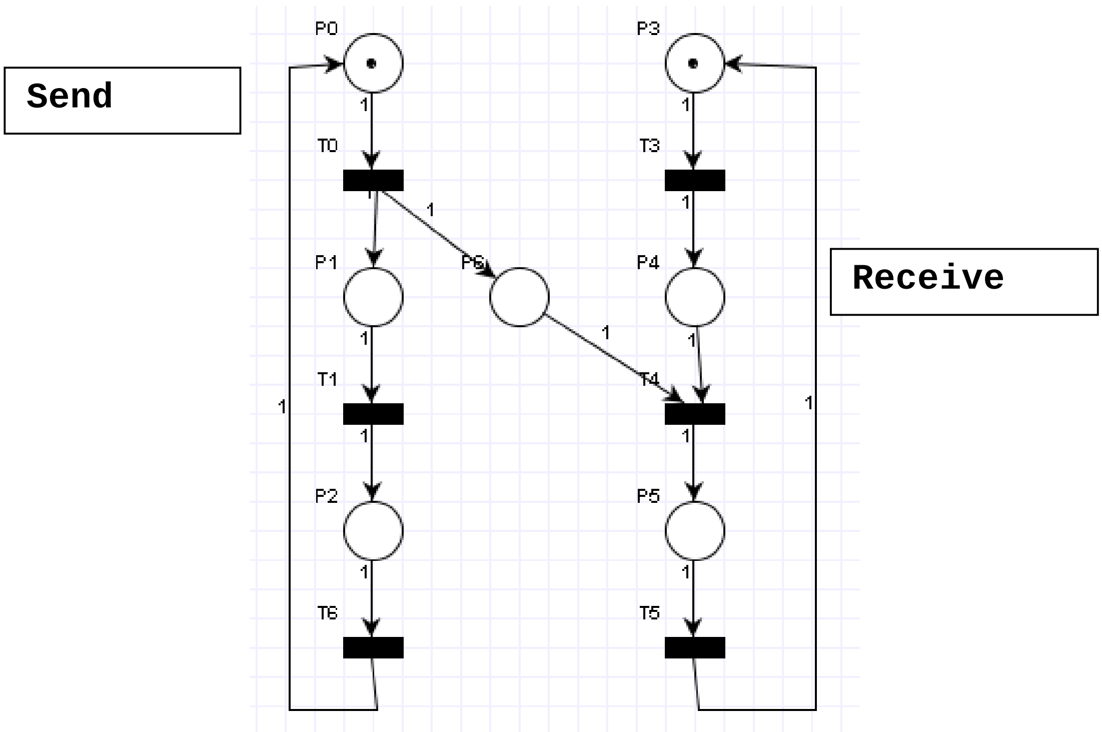


Rys. 1-17 Przejścia T1 i T2 mogą być wykonywane równolegle

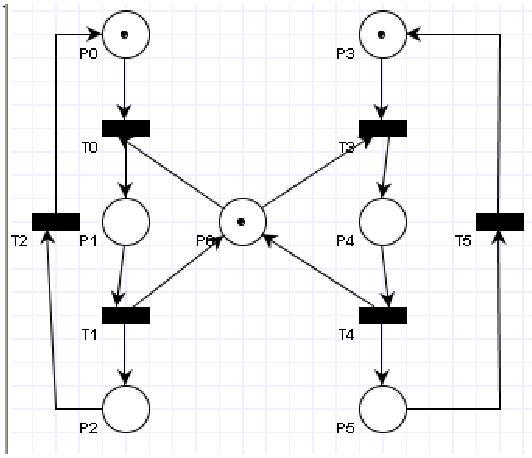
1.7 Przykłady sieci Petriego



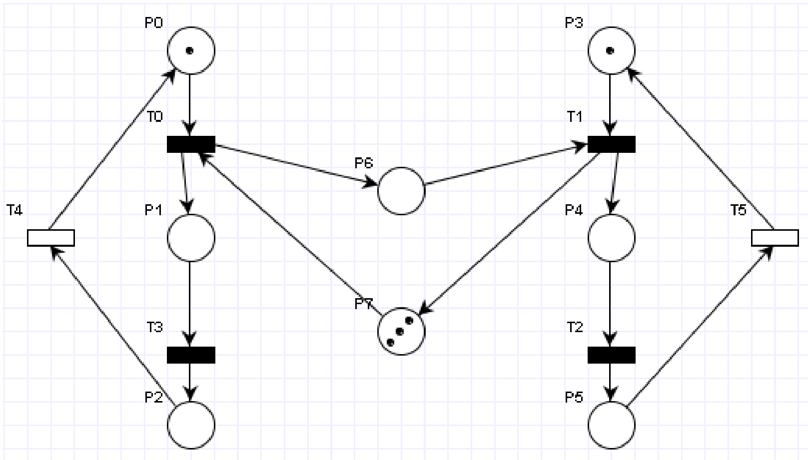
Rys. 1-18 Synchroniczna wymiana komunikatów w systemie QNX pomiędzy procesami P1 i P2



Rys. 1-19 Synchroniczna wymiana komunikatów pomiędzy procesami P1 i P2



Rys. 1-20 Wzajemne wykluczanie procesów P1 i P2

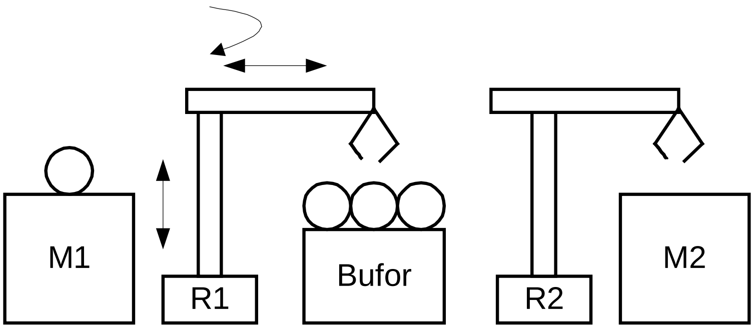


Rys. 1-21 Problem producenta i konsumenta

<u>System Produkcyjny</u> – (wersja problemu Producenta Konsumenta)

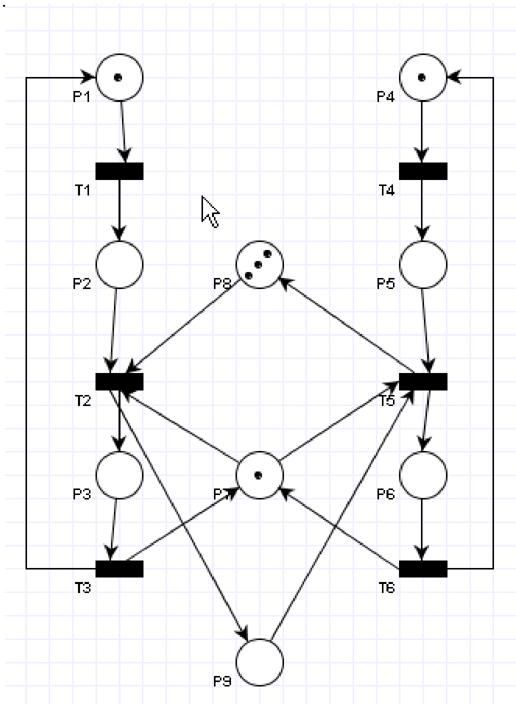
System produkcyjny składający się z dwóch ramion robotów.

- Pierwszy R1 odbiera detal od maszyny M1 i umieszcza go w buforze.
- Drugi R2 pobiera detal z bufora i przekazuje go do maszyny M2.
- Pojemność bufora jest ograniczona – 3 elementy
- Aby uniknąć kolizji tylko jeden robot może operować na buforze



Rys. 1-22 Model systemu produkcyjnego

Miejsca		Interpretacja
P1	P4	Robot R1 (R2) wykonuje prace poza buforem
P2	P5	Robot R1 (R2) czeka na dostęp do bufora
P3	P6	Robot R1 (R2) wykonuje pracę na buforze
P7		Wzajemne wykluczanie
P8	P9	Liczba pustych (pełnych) pozycji w buforze
Przejścia		Interpretacja
T1	T4	Robot R1 (R2) żąda dostępu do bufora
T2	T5	Robot R1 (R2) wykonuje operację
T3	T6	Robot R1 (R2) opuszcza bufor



Rys. 1-23 Przykład sieci Petriego dla systemu produkcyjnego

1.8 Metody analizy

Zbudowanie sieci Petriego na podstawie nieformalnej czy nawet formalnej specyfikacji programu jest trudnym zagadnieniem.
Powstaje pytanie – na ile uzyskana ze specyfikacji sieć Petriego odpowiada tej specyfikacji?

W wielu przypadkach proces budowy modelu w postaci sieci Petriego ujawnia niekompletność specyfikacji. Ma to znaczenie w systemach do zastosowań krytycznych (ang. *Mission Critical Systems*).

Metody analizy sieci Petriego:
- Grafy osiągalności
- Grafy pokrycia
- Metody algebraiczne (oparte na macierzowej reprezentacji sieci).

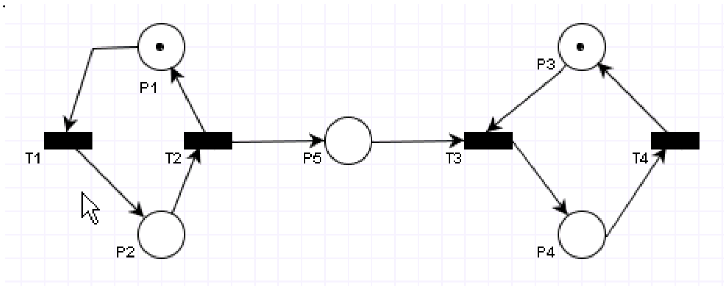
1.9 Drzewo osiągalności i graf pokrycia

Metoda bazuje na budowie <u>drzewa osiągalności</u>. Ze stanu M_0 odpala się wszystkie możliwe przejścia które prowadzą do osiągalnych znakowań tworzących węzły grafu, z nich kolejne, itd.

<u>Drzewo osiągalności</u> (ang. *reachability tree*):
- Węzeł początkowy – stan M_0.
- Węzły – stany osiągalne $M \in R(M_0)$, ze stanu M_0. etykietowane wektorami stanu $(p_0, p_1, p_2, ... p_k)$.
- Łuki – przejścia pomiędzy stanami etykietowane nazwami przejść.

Własności drzewa osiągalności:
- W drzewie osiągalności można w sposób jednoznaczny dojść od korzenia do dowolnego innego węzła.

- Drzewo osiągalności może być potencjalnie nieskończone gdyż:
  a) zawiera powtarzające się stany
  b) sieć jest nieograniczona.



Rys. 1-24 Sieć Petriego dla problemu producenta – konsumenta z nieograniczonym buforem. Znakowanie początkowe M_0 = (1,0,1,0,0)

Powtarzając przejścia t1,t2,t1,t2,... otrzymujemy znakowania postaci: (1,0,1,0,1), (1,0,1,0,2), ..., (1,0,1,0,n) które są podobne.

Istnienie węzłów podobnych nie wzbogaca znacząco wiedzy o systemie.

Aby ograniczyć nieograniczony rozrost drzewa stosuje się następujące działania:

- Eliminacja węzłów zduplikowanych
- Wprowadzenie symbolu nieskończoności ¥

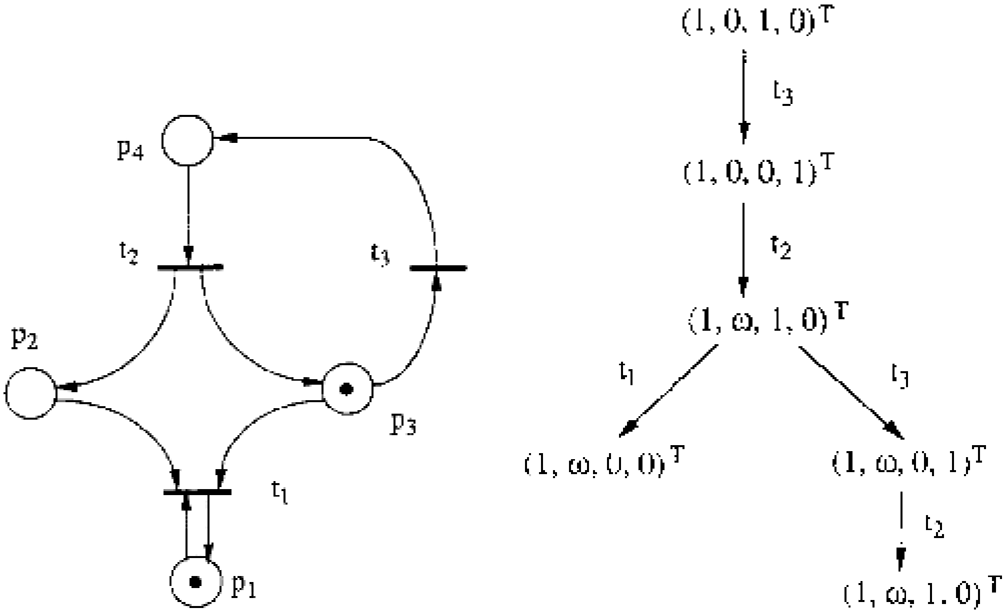
<u>Eliminacja węzłów zduplikowanych:</u>
Gdy na drodze od M_0 do bieżącego oznakowania M istnieje znakowanie M\` które jest identyczne z M to znakowanie M oznaczamy jako węzeł końcowy (ang. *terminal node*).

<u>Eliminacja przejść nieskończonych:</u>
Wprowadza się symbol ¥ będący reprezentacją nieskończoności.
Dla każdego n zachodzi

- n + ¥ = ¥,
- ¥ - n = ¥,
- n < ¥

Gdy na drodze od M0 do bieżącego oznakowania M istnieje znakowanie M\` którego pozycje są mniejsze lub równe pozycjom M wtedy pozycje znakowania M które są ostro większe od odpowiadających pozycji M\` oznaczane są jako ¥.

Istnienie takich pozycji powoduje, że przejścia od M do M\` mogą być wykonywane w nieskończoność. Za każdym takim przejściem liczba znaczników na pozycji gdzie jest symbol ¥ zwiększa się.

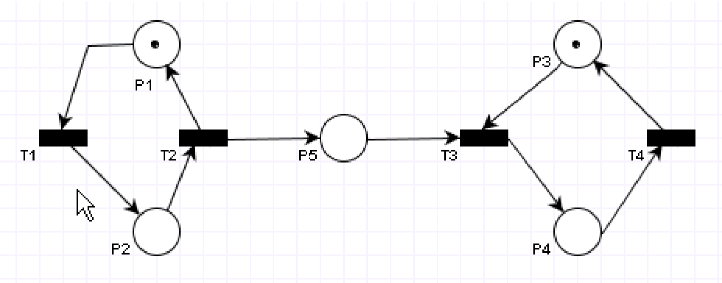


Rys. 1-25 Sieć Petriego i odpowiadające jej drzewo pokrycia

<u>Algorytm konstruowania drzewa pokrycia:</u>

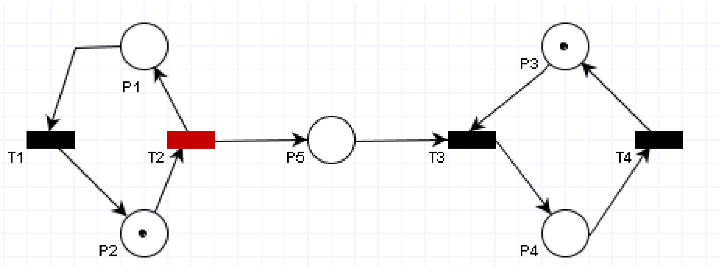
1.0) Niech znakowanie M_0 będzie korzeniem drzewa i oznacz je jako „*new*”.
2.0) Dopóki istnieją węzły oznaczone jako „*new*” wykonuj dalsze kroki.
3.0) Wybierz oznakowanie z etykietą „*new*”.
3.1) Gdy M jest identyczne z innym oznakowaniem w drzewie oznacz go jako „*old*” i przejdź do innego węzła oznaczonego jako „new”.
3.2) Gdy z M nie można wykonać żadnego przejścia oznacz węzeł jako końcowy.
4.0) Dla każdego przejścia t wykonywalnego z M wykonaj kroki następujące:
4.1) Utwórz M\` węzeł odpowiadający wykonaniu przejścia t z M.
4.2) Gdy na ścieżce z korzenia M_0 do M\` istnieje znakowanie M\`\` takie że M\`(p) ≥ M\`\`(p) dla każdego miejsca p i M\` ≠ M\`\` wtedy zastąp M\`(p) przez ¥ dla każdego p dla którego M\`(p) > M\`\`(p).
4.3) Dodaj M\` jako węzeł i narysuj łuk od M do M\` i oznacz M\` etykietą „*new*”.

Przykład - Problem producenta konsumenta z nieograniczonym buforem

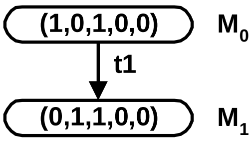


Rys. 1-26 Sieć Petriego dla problemu producenta – konsumenta z nieograniczonym buforem. Znakowanie początkowe M_0 = (1,0,1,0,0)

Jedyne możliwe przejście z M_0 to t1

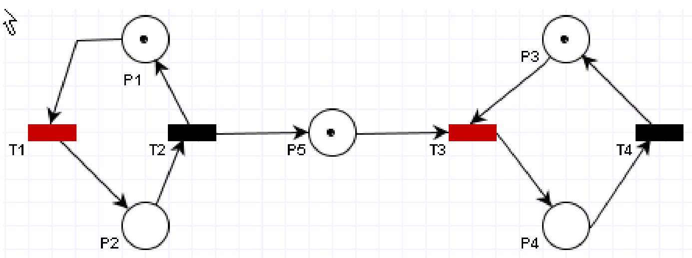


Rys. 1-27 Przejście t1 ze stanu M_0 powoduje otrzymanie znakowania M_1= (0,1,1,0,0)



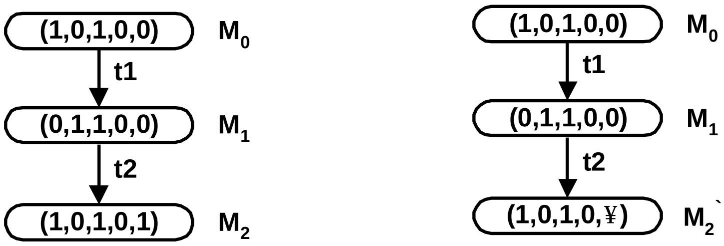
Rys. 1-28 Przejście t1 ze znakowania M_0 do M_1

Jedyne możliwe przejście z M_1 to t2 które prowadzi do M_2.



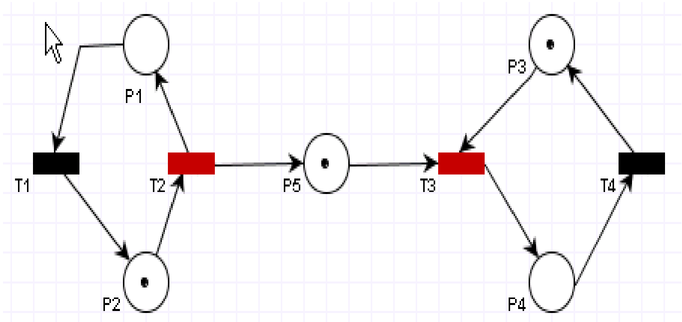
Rys. 1-29 Przejście t2 ze znakowania M_1 powoduje otrzymanie znakowania M_2= (1,0,1,0,1)

Sprawdzamy czy na ścieżce z korzenia M_0 do M_2 istnieje znakowanie M`` takie, że $M_2$(p) ≥ M``(p). Ponieważ $M_2 > M_0$ to na pozycji 5 znakowania M_2 wstawiamy znak ¥ co daje M_2` = (1,0,1,0,¥).

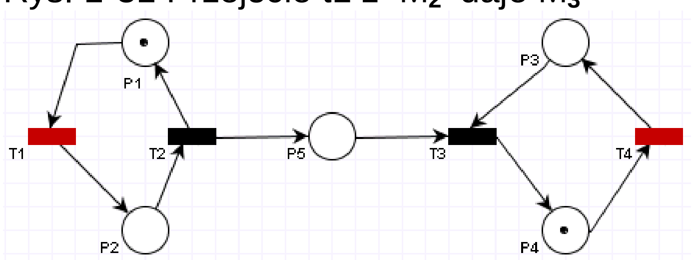


Rys. 1-30 Zastąpienie znakowania M_2 przez M_2`

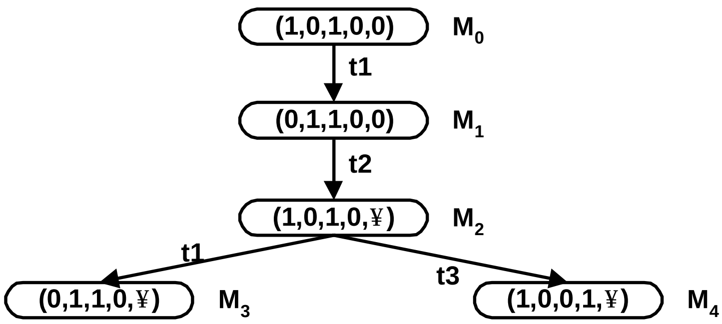
Ze znakowania M_2` wykonać można przejścia t1 lub t3.



Rys. 1-31 Przejście t1 z M_2` daje M_3

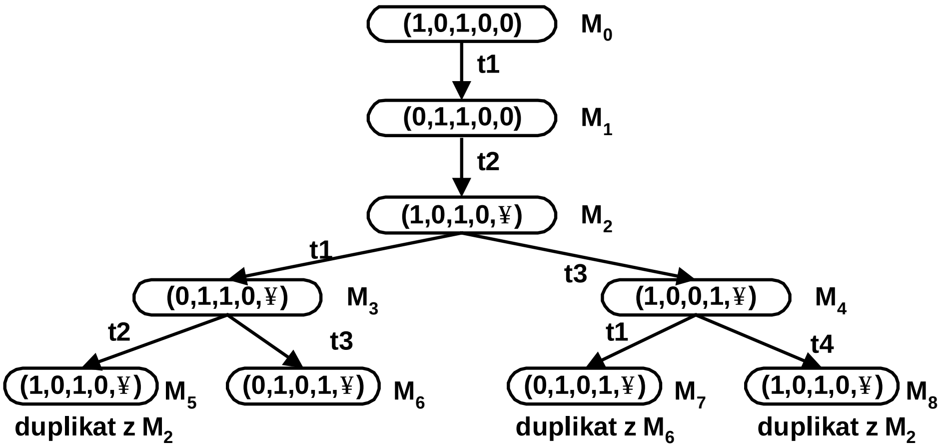


Rys. 1-32 Przejście t3 z M_2` daje M_4



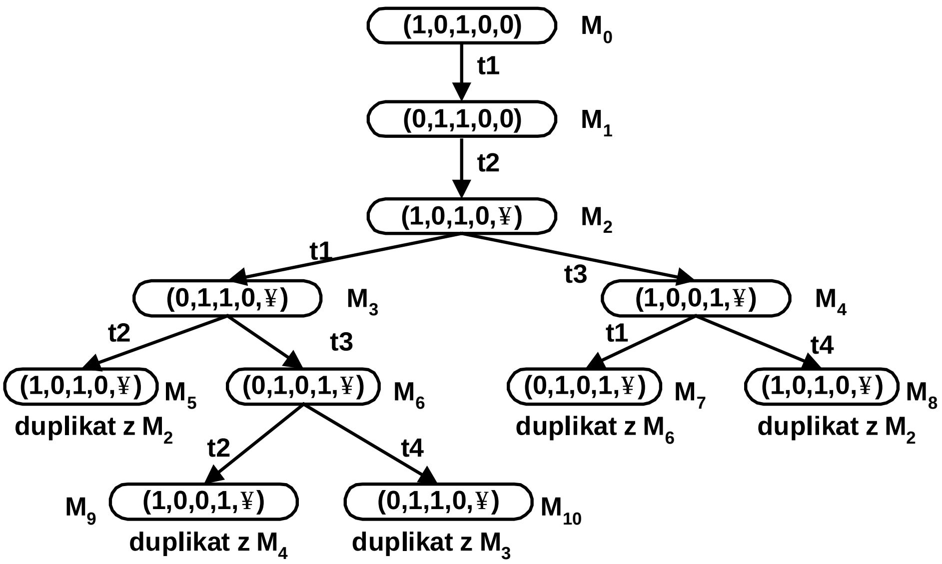
Rys. 1-33 Ze znakowania M_2` wykonać można przejście t1 które daje znakowanie M_3 lub przejście t3 które daje znakowanie M_4

Z M_3 możliwe są przejścia t2 lub t3 a z M_4 możliwe są przejścia t1 i t4. Które dają stany M_5 M_6 oraz M_7 M_8 .



Rys. 1-34 Możliwe przejścia ze stanu M_3 oraz M_4

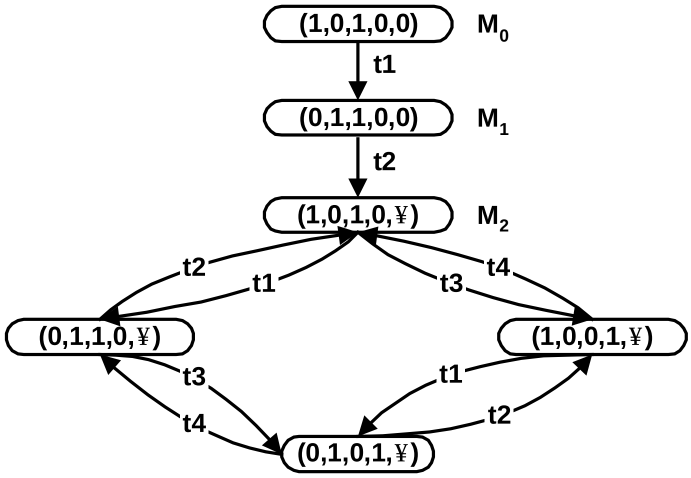
Jedynie ze stanu M6 można wykonać jakieś przejścia co prowadzi do stanów M_9 oraz M_{10}.



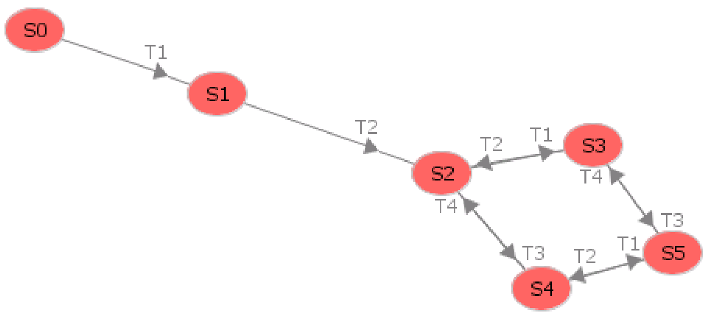
Rys. 1-35 Drzewo pokrycia dla problemu producenta konsumenta z nieograniczonym buforem.

<u>Graf pokrycia</u>

Definicja 20
<u>Graf pokrycia</u> otrzymujemy z drzewa pokrycia przez scalenie duplikujących się wierzchołków.



Rys. 1-36 Graf pokrycia dla problemu producenta konsumenta z nieograniczonym buforem



Rys. 1-37 Graf pokrycia dla problemu producenta konsumenta z nieograniczonym buforem otrzymany za pomocą programu Pipe

Twierdzenie 1-1
Graf pokrycia uogólnionej sieci N jest grafem skończonym.

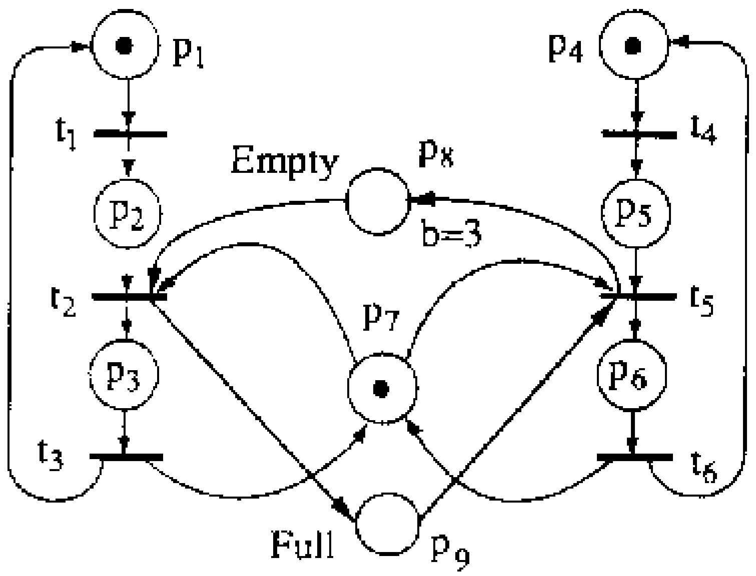
Twierdzenie to jest ważne gdyż pokazuje że można badać sieci o nieskończonym zbiorze znakowań na podstawie skończonego grafu pokrycia.

<u>Z drzewa pokrycia można uzyskać wiele własności sieci Petriego.</u>

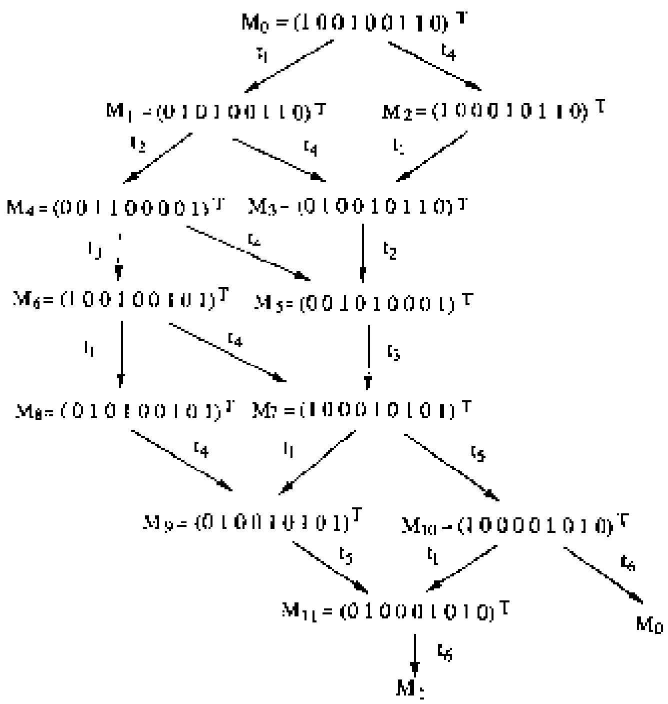
- Gdy węzeł drzewa pokrycia zawiera symbol ¥ to sieć jest nieograniczona.
- Gdy każdy z węzłów drzewa pokrycia zawiera tylko 0 i 1 to sieć jest bezpieczna.
- Tranzycja jest martwa jeżeli nie pojawia się jako łuk w drzewie pokrycia.

Dla ograniczonej sieci Petriego drzewo pokrycia zawiera (jako węzły) wszystkie znakowania osiągalne ze znakowania M_0. W tym przypadku drzewo pokrycia jest drzewem osiągalności.

<u>Przykład analizy</u>



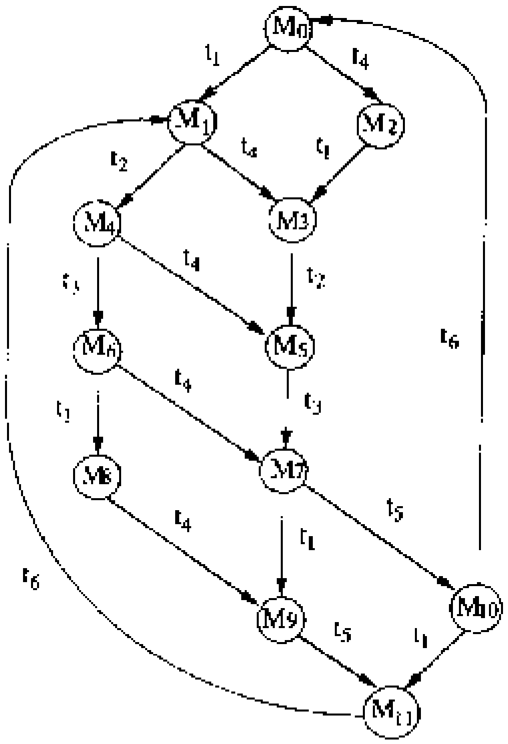
Rys. 1-38 Przykład sieci Petriego dla systemu produkcyjnego



Rys. 1-39 Drzewo pokrycia sieci przykładowej –wersja z jednoelementowym buforem

Ograniczoność i bezpieczeństwo:

- Sieć jest ograniczona gdyż drzewo pokrycia nie zawiera symbolu nieskończoności.
- Dla każdego znakowania liczba znaczników jest nie większa od 1 a więc sieć jest bezpieczna.



Rys. 1-40 Graf osiągalności sieci przykładowej

Żywotność:

Sieć przykładowa jest żywa gdyż w grafie osiągalności wychodząc od znakowania początkowego można wykonać dowolne przejście przez wykonanie pewnej sekwencji przejść.

Odwracalność:

Sieć jest odwracalna gdyż jak widać z grafu osiągalności znakowanie początkowe M_0 jest osiągalne z dowolnego znakowania $M \in R(M_0)$

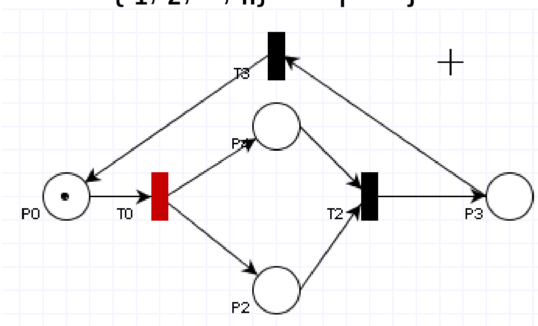
1.10 Macierz incydencji i równania stanu

Dynamika sieci Petriego może być opisana przy pomocy macierzy incydencji.

S – uogólniona sieć Petriego

$S = (P,T,A,W,M_0)$

- A – funkcja opisująca łuki sieci,
- W – wagi łuków,
- M_0 - znakowanie początkowe
- $P = \{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$ – miejsca
- $T = \{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ – przejścia



Rys. 1-41 Przykład sieci Petriego

Macierz incydencji N_{nxm} gdzie:
- n - liczba wierszy – miejsca
- m – liczba kolumn – przejścia

Definicja 1-1

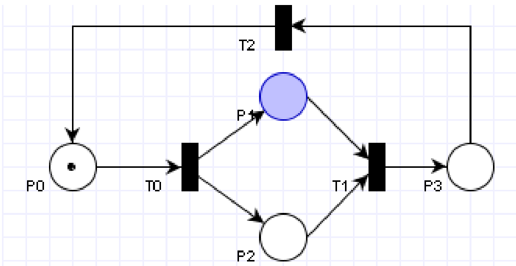
<u>Macierzą wejść</u> nazywamy macierz $N^{+} = (a_{ij})_{nxm}$ której współczynniki definiowane są jak poniżej:

a_{ij}^{+} - liczba łuków wyjściowych wychodzących od przejścia t_i i dochodzących do miejsca p_j

$$a_{ij}^{+} = \begin{array}{l} W(t_j, p_i), gdy\ t_j \in In(p_i) \\ \qquad 0\, gdy\ nie \end{array}$$

Gdy tranzycja t_j ulega odpaleniu a_{ij}^{+} reprezentuje liczbę znaczników pojawiających się w miejscu p_i.

	T0	T1	T2
P0	0	0	1
P1	1	0	0
P2	1	0	0
P3	0	1	0



Rys. 1-42 Macierz wejść N^{+}

Definicja 1-2

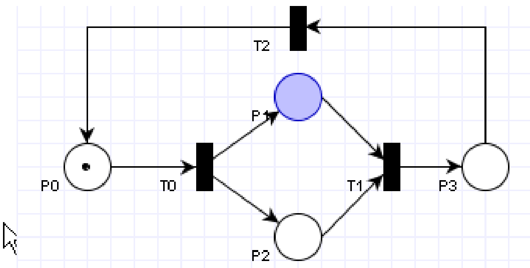
<u>Macierzą wyjść</u> nazywamy macierz $N^{-} = (a_{ij})_{nxm}$ której współczynniki definiowane są jak poniżej:

a_{ij}^{-} - liczba łuków wejściowych wychodzących od miejsca p_i i dochodzących do przejścia t_j

$$a_{ij}^{-} = \begin{cases} W(p_i, t_j), gdy\ t_j \in Out(p_i) \\ 0\ gdy\ nie \end{cases}$$

Gdy tranzycja t_j ulega odpaleniu a_{ij}^{-} reprezentuje liczbę znaczników usuwanych z miejsca p_i.

	T0	T1	T2
P0	1	0	0
P1	0	1	0
P2	0	1	0
P3	0	0	1



Rys. 1-43 Macierz wyjść N^{-}

Macierz wyjść pozwala na sprawdzenie która tranzycja jest możliwa przy znakowaniu M. Tranzycja t_i jest możliwa gdy :

$$a_{ij}^{-} \leq M(p_j), \quad i = 1,2,\ldots,m$$

W powyższym przykładzie tranzycja t_1 jest możliwa dla znakowania (0,1,1,0) gdyż zachodzi powyższa nierówność.

Definicja 1-3

<u>Macierzą incydencji</u> nazywamy macierz $N = (a_{ij})_{nxm}$ taką że $N = N^{+} - N^{-}$

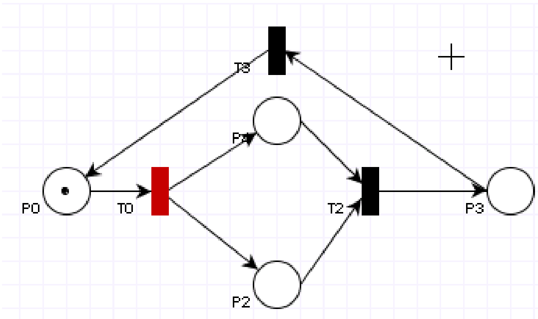
$$a_{ij} = a_{ij}^{+} - a_{ij}^{-}$$

	T0	T1	T2
P0	0	0	1
P1	1	0	0
P2	1	0	0
P3	0	1	0

	T0	T1	T2
P0	1	0	0
P1	0	1	0
P2	0	1	0
P3	0	0	1

	T0	T2	T3
P0	-1	0	1
P2	1	-1	0
P3	0	1	-1
P4	1	-1	0

	T0	T2	T3
P0	-1	0	1
P2	1	-1	0
P3	0	1	-1
P4	1	-1	0



Rys. 1-44 Macierz incydencji N

Macierz incydencji reprezentuje zmianę znakowania miejsca P_i gdy wykonane zostaje przejście t_j

Przedstawienie sieci za pomocą macierzy incydencji nazywa się <u>liniowo algebraiczną</u> reprezentacją sieci.

Równanie stanu dla sieci Petriego:

$$M_k = M_{k-1} + N^T u_k, k = 1,2,...$$

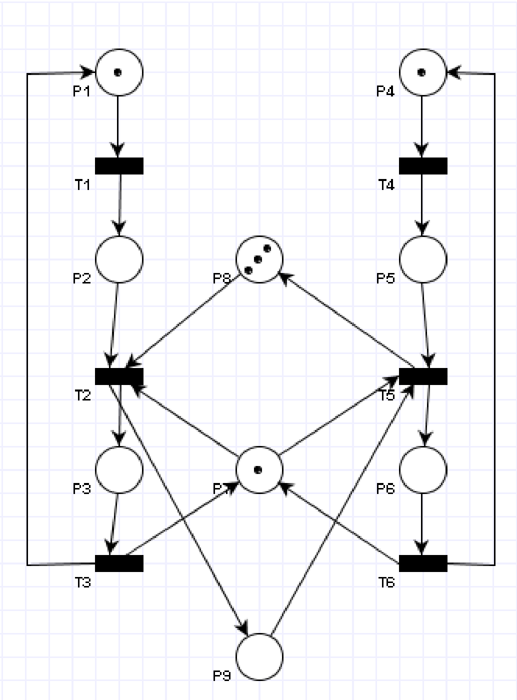
Gdzie:

M_k - wektor kolumnowy wymiaru *m* reprezentujący znakowanie

M_k otrzymane ze znakowania M_{k-1} po wykonaniu tranzycji t_i.

Wektor u_k jest wektorem kolumnowym wymiaru *n* w którym tylko jedna pozycja jest niezerowa. Posiada 1 na pozycji i reprezentującej tranzycję t_i.

Przykład dla systemu produkcyjnego



Rys. 1-45 Przykład sieci Petriego dla systemu produkcyjnego

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
P1	0	0	1	0	0	0
P3	0	1	0	0	0	0
P2	1	0	0	0	0	0
P4	0	0	0	0	0	1
P5	0	0	0	1	0	0
P6	0	0	0	0	1	0
P7	0	0	1	0	0	1
P8	0	0	0	0	1	0
P9	0	1	0	0	0	0

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
P1	1	0	0	0	0	0
P3	0	0	1	0	0	0
P2	0	1	0	0	0	0
P4	0	0	0	1	0	0
P5	0	0	0	0	1	0
P6	0	0	0	0	0	1
P7	0	1	0	0	1	0
P8	0	1	0	0	0	0
P9	0	0	0	0	1	0

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
P1	-1	0	1	0	0	0
P3	0	1	-1	0	0	0
P2	1	-1	0	0	0	0
P4	0	0	0	-1	0	1
P5	0	0	0	1	-1	0
P6	0	0	0	0	1	-1
P7	0	-1	1	0	-1	1
P8	0	-1	0	0	1	0
P9	0	1	0	0	-1	0

Tab. 1-1 Macierz wejść, wyjść i incydencji dla systemu produkcyjnego

1.11 Niezmienniki sieci Petriego

W teorii sieci Petriego definiuje się dwie ważne własności sieci Petriego:

- Niezmiennik przejść T (ang. *T-invariant*)
- Niezmiennik miejsc P (ang. *P-invariant*).

Niezmienniki przejść

Definicja 1-4

Niech wektor x będzie wektorem o współrzędnych całkowitych których liczba jest równa liczbie przejść w sieci S. Rozwiązanie równania:

$$N \ x = 0$$

nazywane jest niezmiennikiem przejść S (wektor x odpowiada przejściom).

Pozycje wektora x podają liczbę odpaleń tranzycji $t_1, t_2, .. t_n$ przekształcających znakowanie M_0 z powrotem do M_0. Wektor x zawiera tylko liczbę tranzycji nie podając ich kolejności.
Powyższe równanie może posiadać wiele rozwiązań.

Zbiór przejść odpowiadających niezerowym elementom rozwiązania nazywamy przejściami bazowymi i oznaczamy jako ||x||.

Baza nazywana jest bazą minimalną gdy rozwiązanie nie zawiera niepustego podzbioru który jest także bazą.

Niezmienniki przejść stosowane są do badania:

- Żywotności sieci
- Odwracalności

Przykład dla systemu produkcyjnego

Wektor niezmienników przejść:

T1	T2	T3	T4	T5	T6
1	1	1	1	1	1

Sieć jest żywa gdyż wszystkie przejścia mogą być wykonane.
Sieć jest odwracalna gdyż można dojść ponownie powrotem do stanu początkowego.

Niezmienniki miejsc

Niezmienniki miejsc wyrażają pewne stałe własności znakowań osiągalnych w danej sieci. Opisują one zbiory miejsc w sieci w których łączna lub ważona liczba znaczników pozostaje stała.

Definicja 1-5

Niech wektor y będzie wektorem o współrzędnych całkowitych których liczba jest równa liczbie miejsc. Rozwiązanie równania:

$$N^T y = 0$$

gdzie:

- N – transponowana macierz incydencji
- y - wektor ($y_1, y_2, \ldots, y_n$) odpowiadający miejscom

nazywane jest niezmiennikiem miejsc P.

Powyższe równanie może posiadać wiele rozwiązań.

Zbiór miejsc odpowiadających niezerowym elementom rozwiązania nazywamy miejscami bazowymi i oznaczamy jako ||y||.

Baza nazywana jest bazą minimalną gdy rozwiązanie nie zawiera niepustego podzbioru który jest także bazą.

Niezmienniki miejsc stosowane są do badania:

- Ograniczoności miejsc
- Zachowawczości sieci

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9
y1	1	1	1						
y2				1	1	1			
y3			1			1	1		
y4								1	1

Tab. 1-2 Niezmienniki miejsc dla sieci przykładowej systemu produkcyjnego.

Bazowe niezmienniki miejsc:

$||y_1|| = \{p_1,p_2,p_3\}$, $||y_2|| = \{p_4,p_5,p_6\}$, $||y_3|| = \{p_3,p_6,p_7\}$, $||y_4|| = \{p_8,p_9\}$

Z niezmienników miejsca można wnioskować o ograniczoności i bezpieczeństwie sieci:

- Jeżeli każde miejsce w sieci należy do jakiegoś rozwiązania bazowego i stan początkowy jest ograniczony to sieć jest ograniczona.
- Jeżeli liczba znaczników w każdym rozwiązaniu bazowym jest równa 1 to sieć jest bezpieczna.

Zachowawczość:

- Sieć jest zachowawcza względem wektora wagowego w = [1,1,2,1,1,2,1,1,1]
- Suma ważona liczby znaczników dla dowolnego znakowania osiągalnego ze znakowania początkowego jest stała i wynosi 4.

Wychodząc z rozwiązania bazowego:

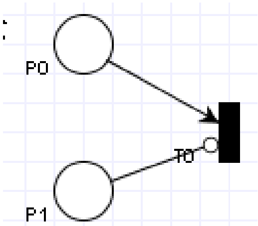
- liczba znaczników w każdym rozwiązaniu bazowym wynosi 1 ,
- miejsca w $||y_1||$,$||y_2||$ i $||y_4||$ wykluczają się wzajemnie,
- rozwiązania bazowe $||y_1||$ i $||y_3||$ zawierają wspólne miejsce p_3 ,
- rozwiązania bazowe $||y_2||$ i $||y_3||$ zawierają wspólne miejsce p_6 .
- Stąd waga miejsc p_3 i p_6 powinna być 2 aby sieć była zachowawcza.

1.12 Inne rodzaje sieci Petriego

<u>Sieć z łukami wstrzymującymi</u>

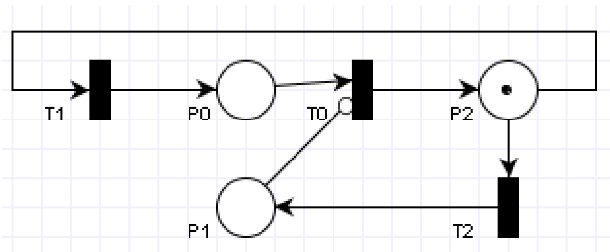
W sieci z łukami wstrzymującymi występują trzy rodzaje łuków:

- wejściowe
- wyjściowe
- wstrzymujące



Przejście T0 nie wykona się gdy w miejscu P1 znajduje się znacznik mimo że w P0 znacznik się znajduje.

Przejście jest dozwolone jeżeli w każdym miejscu wejściowym jest tyle znaczników ile wynosi waga łuku i jeżeli każde miejsce wstrzymujące zawiera mniej znaczników niż wynosi waga łuku wstrzymującego.



Rys. 1-46 Przykład sieci Petriego z łukiem wstrzymującym

Czasowe sieci Petriego

Definicja 21

Prosta sieć czasowa jest uporządkowaną piątką postaci N = (P,T,A,M_0,σ) jeżeli spełnione są warunki:

- (P,T,A) jest siecią
- $M_0: P \to Z_+$ jest funkcją określoną na zbiorze miejsc zwaną znakowaniem początkowym sieći N.
- $\sigma: T \to Q_+$ jest funkcją opóźnień przypisującą każdemu przejściu liczbę wymierną nieujemną $\sigma(t)$ nazywaną opóźnieniem statycznym

Jeżeli przejście t staje się aktywne to wykona się po $\sigma(t)$ jednostkach czasu chyba że przestanie być aktywne na skutek wykonania innego przejścia.

Kolorowane sieci Petriego

Sieci złożone – dopuszcza się istnienie wielu rodzajów znaczników różniących się kolorem. Przejścia maja przypisane wyrażenia które umożliwiają manewrowanie kolorami.

1.13 Literatura

[1] Szpyrka Marcin, Sieci Petriego w modelowaniu i analizie systemów współbieznych, WNT Warszawa 2008.

[2] Zurawski R., Zhou MengChu, Petri Nets and Industrial Applications: A tutorial, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 41, No. 6, December 1994.

[3] Pere Bonet, Catalina M. Llado, Ramon Puigjaner, PIPE v2.5: a Petri Net Tool for Performance ModelingProgram pipe2 http://pipe2.sourceforge.net